Problemy NP-trudne

Wojciech Penczek

1 Klasy złożoności obliczeniowej

Problem jest **trudno rozwiązywalny** jeśli każdy algorytm rozwiązujący ten problem ma złożoność co najmniej wykładniczą.

Problemy w klasie NP-zupełne, to znaczy rozwiązywalne niedeterministycznie w czasie wielomianowym są najprawdopodobniej trudno rozwiązywalne.

Nie zostało to dotąd formalnie udowodnione, ale również nie znaleziono dotąd algorytmu o złożoności wielomianowej, który rozwiązywałby przynajmniej jeden z tych problemów. Ponadto, wiadomo, że wszystkie problemy w klasie NP-zupełne są sobie (wielomianowo) równoważne, tzn. gdyby dla jednego z nich istaniało rozwiązanie wielomianowe, to istaniałoby dla każdego z nich.

Na poparcie możliwości nieistnienia rozwiązania wielomianowego dla problemów NP-zupełnych należy powiedzieć, że problem ten jest badany przez matematyków od kilkudziesięciu lat.

1.1 Przyłady zadań NP-zupełnych

Przykład 1.1 *Problem kliki dla grafów niezorientowanych. Mając dany graf G i liczbę k ustal czy G zawiera pograf pełny (klikę) o rozmiarze k.*
Problem kliki jest $\mathcal{NP}$-zupełny.

Przykład 1.2 *Problem spełnialności dla formuł zdaniowych. Mając daną formułę zdaniową należy sprawdzić czy istnieje takie wartościowanie zmiennych zdaniowych w zbiorze zmiennych logicznych $true, false$, że cała formuła przyjmuje wartość $true$.*
Problem spełnialności jest $\mathcal{NP}$-zupełny.

1.2 Dalsze Problemy Grafowe

Definicja 1.1 *Niech* $G = (V, E)$ *będzie grafem niezorientowanym.*

- **Pokryciem wierzchołkowym** *grafu* G *nazywamy podzbiór* $S \subseteq V$, *że każda krawędź grafu jest incydentna z jakiemś wierzchołkiem z* S.
- *Cyklem* **Hamiltona** *nazywamy cykl grafu* G, *który zawiera każdy wierzchołek.*
- *Graf jest* k-**kolorowalny** *jeśli istnieje przyporządkowanie wierzchołkom liczb całkowitych (kolorów)* $1, .., k$ *tak, że żadne dwa sąsiednie wierzchołki nie mają przyporządkowanej tej samej liczby. Liczbą chromatyczną dla grafu nazywamy najmniejsze takie* k.

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem zorientowanym.

- **Cyklicznym pokryciem wierzchołkowym** *grafu G nazywamy podzbiór $S \subseteq V$, że każdy cykl grafu zawiera wierzchołek z S.*
- **Cyklicznym pokryciem krawędziowym** *grafu G nazywamy podzbiór $F \subseteq E$, że każdy cykl grafu zawiera krawędź z F.*
- *Zorientowanym cyklem* **Hamiltona** *nazywamy cykl grafu G, który zawiera każdy wierzchołek.*

Twierdzenie 1.1 *Następujące problemy należą do klasy NP.*

1. *Problem spełnialności dla formuł zdaniowych,*
2. *Problem* 3*-spełnialności dla formuł zdaniowych (postać 3-CNF),*
3. *Problem istnienia k-kliki w grafie niezorientowanym,*
4. *Problem istnienia pokrycia wierzchołkowego o rozmiarze k w grafie niezorientowanym,*
5. *Problem istnienia cyklu Hamiltona w grafie niezorientowanym,*
6. *Problem k-kolorowania dla grafu niezorientowanego,*
7. *Problem istnienia cyklicznego pokrycia wierzchołkowego o rozmiarze k w grafie zorientowanym,*
8. *Problem istnienia cyklicznnego pokrycia krawędziowego o rozmiarze k w grafie zorientowanym,*
9. *Problem istnienia cyklu Hamiltona w grafie zorientowanym,*

1.3 Schemat dowodzenia NP-zupełnosci dla powyższych problemów

```
                 CNF-spelnialnosc
                  /             \
                 /               \
              klika          3-spelnialosc
                |                 |
                |                 |
            pokrycie         kolorowanie
         wierzcholkow
           /   /     \
          /   /       \
 cykliczne cykliczne   skierowany
 pokrycie   pokrycie     cykl
wierzcholkowe  krawedziowe  Hamiltona
```

1.4 Zadania o wielomianowej złożoności pamięciowej

Ta klasa nazywa się P-SPACE i zawiera zadania wymagające wielomianowej złożoności pamięciowej.

$$\mathcal{NP} - TIME \subseteq \mathcal{P} - SPACE$$

Ponadto

$$\mathcal{P} - TIME \subseteq \mathcal{NP} - TIME \subseteq \mathcal{P} - SPACE$$

Przykład 1.3 *Przykład języka zupełnego w klasie P-SPACE.*

- *L jest zbiorem wyrażeń regularnych, których uzupełnienia reprezentują zbiory niepuste.*
- *Zawieranie języków dla automatów skończonych.*