Historia Rachunku Prawdopodobieństwa i Statystyki
WYKŁAD IX: Andriej N. Kołmogorov i jego Grundbegriffe

MiNI PW

Rachunek klasyczny dla zdarzeń jednakowo prawdopodobnych (Bernoulli, *Ars Conjectandi*:

Twierdzenie o dodawaniu.

Jesli A i B nie moga zdarzyć sie jednoczesnie, to $P(A \cup B)$ jest równe Liczba przypadków wystapienia A/ Całkowita liczba przypadków + Liczba przypadków wystapienia B/ Całkowita liczba przypadków =P(A) + P(B)

Reguła mnozenia prawdopodobieństw.

$$P(A|B) = P(A)P(B \text{ jesli A wystapiło})$$

Zdarzenie moralnie pewne (J. Bernoulli): o szansie (odds) > 1000.
Zdarzenie moralnie niemozliwe: o szansie (odds) $< 10^{-3}$.

$$\text{Szansa} \quad \frac{p}{1-p} > 10^3 \equiv p > \frac{10^3}{10^3+1}$$

Fizyka statystyczna

Rozwój fizyki statystycznej (Clausius, Maxwell, Boltzmann, Gibbs)

- definicje w klasycznej teorii gazów (temperatura, ciśnienie, entropia) jako konekwencja zderzeń molekuł znajdujących się w ruchu
- prawa termodynamiki sprowadzone do twierdzeń rachunku prawdopodobieństwa

J. Gibbs *Elementary Principles in Statistical Mechanics* (1912)

Szósty problem Hilberta

Hilbert (1909, Kongres matematyków w Paryzu): problem formalizacji definicji prawdopodobienstwa i rachunku zdarzen losowych. Aksjomaty zamiast dwóch twierdzeń o dodawaniu i mnożeniu prawdopodobienstw ? (Aksjomatyzacja tych części fizyki, w których matematyka odgrywała zasadniczą rolę, przede wszystkim mechaniki i *rachunku prawdopodobieństwa*)

Zasada przeliczalnej addytywności

W 1909 roku E. Borel formułuje zasadę przeliczalnej addytywności dla zdarzeń wykluczających się.
Frechet: 'Borel sformułował nowy rodzaj addytywności'
Powrót do problemu Bernoulliego, co jest zdarzeniem zaniedbywalnym/pewnym i jaką ma to interpretację w świecie fizycznym.
Nie było jasne, co oznacza

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} P(A_\gamma)$$

Później zorientowano się, że

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} P(A_\gamma) < \infty \to \{\gamma : P(A_\gamma) > 0\} - \text{przeliczalny},$$

bo liczba γ takich, że $P(A_\gamma) > 1/n$, jest skończona.

Zasada Couronta

Fizycznie niemożliwe zdarzenie to zdarzenie o *zaniedbywalnym prawdopodobieństwie*.
Borel:

- $P(A) = 10^{-6}$ zdarzenie niemożliwe na skali ludzkiej;
- $P(A) = 10^{-15}$ zdarzenie niemożliwe na skali ziemskiej;
- $P(A) = 10^{-50}$ zdarzenie niemożliwe na skali kosmicznej;

Zasada Couronta

Silna zasada Cournota: Zdarzenie, wybrane przed doświadczeniem nie zdarzy się w doświadczeniu, jeśli ma małe pradopodobieństwo;
Słaba zasada Cournota: Zdarzenie o małym prawdopodobieństwie będzie rzadko zdarzało się w powtarzanych doświadczeniach.
Jak ściśle określić zdarzenie o zaniedbywalnym prawdopodobieństwie ?
Levy: Pojecie zdarzeń jednakowo prawdopodobnych wystarcza do uprawiania matematyki zdarzeń losowych. Dopiero pojęcie zdarzeń mało prawdopodobnych nadaje prawdopodobieństwu praktycznego znaczenia.
Borel, Levy, Kołmogorow opowiadali się za silną zasadą Couronta; Chuprov za słabą zasadą
Jesli nigdy nie zaobserwowaliśmy zajścia zdarzenia to jesteśmy skłonni przypuszczać, ze nie zajdzie nigdy ..

Prekursorzy podejścia Kołmogorowa

- Borel : przeliczalne prawdopodobieństwo;
- Steinhaus: aksjomatyka prawdopodobieństwa dla nieskończonych ciągów 0-1 oparta na aksjomatyzacji Sierpińskiego miary Lebesgue'a (dodatkowo $m(\Omega) = 1$);
- Von Mises: koncepcja kolektywów i aksjomatyzacja ich własności;
- Teoria walencji Słuckiego;
- Ulam i Łomnicki (1932): konstrukcja miary produktowej dla ogólnych przestrzeni;
- Aksjomatyka Cantellego (1932)

Teoria kolektywów von Misesa

Kolektyw (Kollektiv): nieskończony ciąg wyników (o skończonej liczbie wartości), taki, że:

- częstość wystąpienia każdego wyniku w ciągu dąży do liczby nieujemnej (prawdopodobieństwa tego wyniku);
- dla dowolnego podciągu kolektywu wybranego bez znajomości przyszłości częstość wystąpienia wyniku w podciągu dąży do prawdopodobieństwa tego wyniku (wybór elementów do podciągu może zależeć od ostatniego wyniku);

Cel RP: określić sytuacje, w których kolektywy istnieją i można dla nich wyliczyć prawdopodobieństwa (m.in. gry losowe, fizyka teoretyczna)
Określenie prawdopodobieństwa zdarzenia przez von Misesa: granica częstości jego wystąpienia w kolektywie.

Wkład Steinhausa

Wczesne spostrzeżenie, że prawdopodobieństwo można wiązać z miarą: tw. Steinhausa: $\pm$-losowe znaki z pr. $1/2$

$$P(\sum_{i=0}^{\infty} \pm c_n - \text{ zbieżny}) = m(t \in [0,1] : \sum_{i=0}^{\infty} c_n r_n(t) \ - \text{zbieżny})$$

$r_n(\cdot)$- n-ta funkcja Rademachera.
Steinhaus (1920) Dla dowolnego zbioru A dodatniej miary Lebesgue'a na [0,1] (o dodatnim prawdopodobieństwie względem rozkładu jednostajnego)

$$\{|x-y|, x, y \in A\} \supseteq [0, \alpha]$$

dla pewnego $\alpha > 0$

Grundbegriffe (1933)

Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Springer, 1933)
6 aksjomatów: $\mathcal{F} \subset 2^E$

- $\mathcal{F}$ jest ciałem;
- $E \in \mathcal{F}$;
- $P : \mathcal{F} \to R^+$
- $P(E) = 1$;
- $A \cap B = \emptyset$ to
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
- $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ jest taka, że $\bigcap_n A_n = \emptyset$ to $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$

Teoria w *Grundbegriffe*

W *Grundbegriffe* rozwinięta teoria:

- rozkładów prawdopodobieństwa na przestrzeniach nieskończenie wymiarowych;
- konstrukcji warunkowych wartości oczekiwanych i prawdopodobieństw (tu wykorzystane tw. Radona-Nikodyma)

Braki: niemożność aksjomatyzacji rozkładu jednostajnego na prostej
Inne aksjomatyzacje: Renyi, 1954

Andriej Nikołajewicz Kołmogorow (1903-1987)

Wychowywany przez ciotkę, matka zmarła przy urodzeniu, ojciec zginął w czasie ofensywy Denikina w 1919;
1920- studia na Uniwersytecie Moskiewskim;
1922- przykład funkcji z L^1 której szereg Fouriera jest rozbieżny prawie na pewno (później: wszędzie);
1931- profesor UM;
1939- członek rzeczywisty Radzieckiej Akademii Nauk;

Andriej Nikołajewicz Kołmogorow (1903-1987)

Główne osiągnięcia:

- Teoria w *Grundbegriffe*;
- teoria procesów Markowa z czasem ciągłym;
- teoria pól losowych;
- twierdzenia graniczne, teoria rozkładów nieskończenie podzielnych;
- prognoza szeregów czasowych (wzór Wienera-Kołmogorowa)
- teoria turbulencji (od 1946 r dyrektor Laboratorium Turbulencji w Inst. Teoretycznej Geofizyki);
- reprezentacja Kołmogorowa $f : R^n \to R$, ciągła

  $$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{2n+1} g_j\Big(\sum_{i=1}^{n} \phi_{i,j}(x_i)\Big)$$

  $\phi_{i,j}$ nie zależą od f
- algorytmiczna teoria informacji, złożoność Kołmogorowa.

Wymiar Kołmogorowa zbioru A w R^p:

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)},$$

$N(\varepsilon)$-liczba kostek o boku ε przecinających się z A.
Złożoność Kołmogorowa ciągu:
długość najkrótszego kodu dla tego ciągu w kodowaniu uniwersalnym.

A. Kołmogorow

FIG. 1. *Kolmogorov at age 5 with his aunt, Vera Yakovlevna.*

A. Kołmogorow

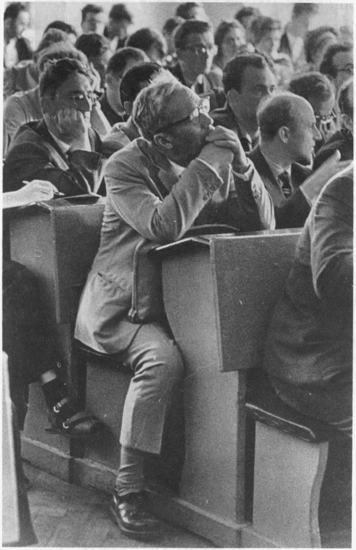

FIG. 10. *At a probability meeting.*

A. Kołmogorow

A. Kołmogorow

FIG. 1. *Kolmogorov at the Tbilisi meeting, 1963.*

A. Kołmogorow

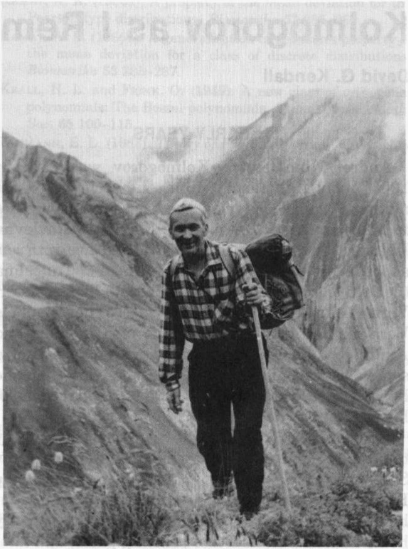

FIG. 2. *Kolmogorov in the Caucasus, about 1929.*

A. Kołmogorow

A. Kołmogorow

FIG. 8. *Kolmogorov and the seal (Galapagos Islands, 1971).*

Sprawa N. Łuzina

N. Łuzin (1883-1950): wybitny specjalista w dziedzinie funkcji rzeczywistych, teorii mnogości, teorii miary (Lemat Łuzina o regularności miary, każda funkcja mierzalna jest jest z dokładnością do zbioru miary ϵ ciągła)
Łuzin został w 1936 r oskarżony o:

- publikowanie ważnych wyników na zachodzie, a słabych w ZSRR;
- pisanie pozytywnych opinii o słabych pracach;
- podkopywanie i niedopuszczanie do akademii 'prawdziwie utalentowanych mlodych uczonych'
- kontynouwanie tradycji carskiej 'moskiewskiej szkoły matematycznej'
- związki z matematykami zachodnimi (m.in. z Borelem i Sierpińskim)

Wsród atakujących Łuzina byli P. Aleksandrow, A. Gelfond, A. Kołmogorow, L. Pontriagin, S. Sobolew, L. Sznirelman, A. Chinczyn.
Łuzun został zrehabilitowany dopiero w 2012 roku.
R. Duda 'Sprawa akademika Łuzina', Wiadomości Matematyczne 2001, 27-46