Historia Rachunku Prawdopodobieństwa i Statystyki
WYKŁAD III: Jakub Bernoulli i jego *Ars Conjectandi*. Abraham de Moivre.

MiNI PW

Rodzina Bernoullich

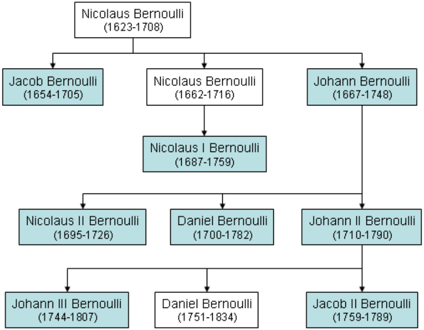
Rodzina Bernoullich przybyła do Bazylei z Antwerpii na początku XVII w. Byli protestantami i uciekali przed prześladowaniami religijnymi księcia Alba.
Szwajcaria w tym czasie była protestancka.
W tym samym czasie odwołanie edyktu nantejskiego we Francji w 1685 roku. Edykt, podpisany przez Henryka IV w 1598 roku dawał protestantom (hugenotom) takie same prawa jak katolikom.
Masowa emigracja protestantów do Prus, Szwajcarii i Anglii.

Konflikty religijne w Niderlandach

Rodzina Bernoullich

Mikołaj Bernoulli (1623-1708)
Jakub Bernoulli (1654-1705), najstarszy syn Mikołaja
jego bracia Jan, Mikołaj.
Jakub umiera w 1705 roku, zostawiając w manuskrypcie *Ars Conjectandi*.
Wydane przez Mikołaja Bernoulliego (Mikołaj I Bernoulli), bratanka JB w 1713 (2013: trzechsetlecie wydania AC: Swiatowy Rok Statystyki)
Daniel Bernoulli : sformułował paradoks petersburski

Rodzina Bernoullich



Jakub Bernoulli

Ars Conjectandi

JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,

ARS CONJECTANDI,

OPUS POSTHUMUM.

Accedit

TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,

Et EPISTOLA Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.

BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
clɔ lɔcc xiii.

Ars Conjectandi

Składa się z 4 części, pierwsza jest komentarzem do książki Huygensa.
Najważniejsze odkrycia:

- Oczekiwanie (Wartość oczekiwana)
- Addytywność prawdopodobieństwa dla zdarzeń rozłacznych;
- (słabe) prawo wielkich liczb;
- rozkład Bernoulliego.

Zauważa nieddytywność prawdopodobieństwa dla zdarzeń nierozłącznych: dwie osoby skazane na śmierć grają o swój los rzucając kośćmi: ten kto uzyska mniejszą liczbę oczek zostanie zgładzony, a drugi odzyska wolność. W przypadku remisu - obaj wolni.
Szanse uwolnienia dla ustalonego więźnia:

$$\frac{6(\text{remisów}) + 1 + 2 + 3 + 4 + 5}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}.$$

Nie oznacza to jednak, że szanse uwolnienia drugiego wynoszą $5/12$: szanse obu są jednakowe.
Dzieje się tak, ponieważ:
Nie ma przypadku obydwaj byliby skazani na śmierć, natomiast jest parę przypadków, gdy obaj mogą znaleźć się wśród żywych.

Prawo wielkich liczb

Podstawowe zagadnienie, które rozpatrywał Bernoulli:
Załóżmy, że prawdopodobieństwo sukcesu wynosi

$$p = \frac{r}{r+s},$$

gdzie r-liczba zdarzeń sprzyjających, s- liczba zdarzeń niesprzyjających.
Z jak dużym prawdopodobieństwem zachodzi zdarzenie:

$$A = \{|\frac{S_N}{N} - p| \leqslant \frac{1}{s+r}\},$$

a nawet więcej, kiedy

$$\frac{P(A)}{1-P(A)} \geqslant C,$$

gdzie C było tak duże, że dawało gwarancję **moralnej pewności**...

Prawo wielkich liczb

Problem Bernoulliego, z którym nie umiał sobie poradzić, to jakość przybliżenia:
dla $r = 30$ i $s = 20\,(t = 50)$, $C = 1000$ uzyskiwał liczność próby 25 550, aby uzyskać moralną pewność (*moral certainty*)

$$P((r-1)n \leqslant S_N \leqslant (r+1)n) \geqslant CP(S_N < (r-1)n \text{ lub } S_N > (r+1)n)$$

$$P(|\frac{S_N}{N} - p| \leqslant \varepsilon) \geqslant CP(|\frac{S_N}{N} - p| \geqslant \varepsilon)$$

$n = N\varepsilon = N/(r+s)$.
na tym przykładzie gwałtownie kończy się książka. Pózniej tylko jedno zdanie (być może dopisane przez Mikołaja B.):
If all events are observed for all of eternity .. all will occur in certain ratios.. Plato himself may have predicted it.
25 550 było dla JB liczbą astronomiczną (większą niż liczba mieszkańców Bazylei w tym czasie ...). Nie umiał poprawić przybliżenia.

$\frac{nr-n}{ns}$, seu $\frac{r+1}{s}$ & $\frac{r-1}{s}$, pluribus quàm c vicibus superet summam casuum reliquorum; h. e. ut pluribus quàm c vicibus probabilius reddatur, rationem numeri observationum fertilium ad numerum omnium intra hos limites $\frac{r+1}{s}$ & $\frac{r-1}{s}$, quàm extra casuram esse. Quod demonstrandum erat.

In speciali autem horum applicatione ad numeros satis per se patet, quòd quo majores in eadem ratione assumuntur numeri r, s & t, eo arctius quoque constringi possunt limites $\frac{r+1}{s}$ & $\frac{r-1}{s}$ rationis $\frac{r}{s}$. Idcirco si ratio inter numeros casuum $\frac{r}{s}$, per experimenta determinanda, sit ex. gr. sesquialtera, pro r & s non pono 3 & 2, sed 30 & 20, vel 300 & 200 &c. sufficiat posuisse $r \infty 30$, $s \infty 20$, & $t \infty r+s \infty 50$, ut limites fiant $\frac{r+1}{s} \infty \frac{31}{50}$, & $\frac{r-1}{s} \infty \frac{29}{50}$; & statuatur insuper $c \infty 1000$: sic fiet ex Scholii præscripto, pro terminis ad

sinistram:

$$m > \frac{Lc.\overline{s-1}}{L\overline{r+1} - Lr} \infty \frac{4.2787536}{142405} < 301$$

$$nt \infty mt + \frac{mst - st}{r+1} < 24728$$

dextram:

$$m > \frac{Lc.\overline{r-1}}{L\overline{s+1} - Ls} \infty \frac{4.4623980}{211893} < 211.$$

$$nt \infty mt + \frac{mrt - rt}{s+1} \infty 25550.$$

Unde per ibi demonstrata infertur, quòd institutis 25550 experimentis multo plus millies verisimilius sit, rationem quam numerus fertilium observationum obtinebit ad numerum omnium, intra hos limites $\frac{31}{50}$ & $\frac{29}{50}$ casuram, quàm extra. Atque eodem pacto, posita $c \infty 10000$, aut $c \infty 100000$ &c. cognoscetur, idem plus decies millies probabilius fore, si fiant experimenta 31258; & plus quàm centies millies,

millies, si capiantur 36966, &c. & sic porrò in infinitum, additis nempe continuo ad 25550 aliis 5708 experimentis. Unde tandem hoc singulare sequi videtur, quòd si eventuum omnium observationes per totam æternitatem continuarentur, (probabilitate ultimo in perfectam certitudinem abeunte) omnia in mundo certis rationibus & constanti vicissitudinis lege contingere deprehenderentur; adeo ut etiam in maximè casualibus atque fortuitis quandam quasi necessitatem, &, ut sic dicam, fatalitatem agnoscere teneamur; quam nescio annon ipse jam Plato intendere voluerit, suo de universali rerum apocatastasi dogmate, secundum quod omnia post innumerabilium seculorum decursum in pristinum reversura statum prædixit.

Figure 2.1. The final two pages from Jacob Bernoulli's Ars Conjectandi. *(From Bernoulli, 1713, pp. 238–239.)*

Komentarz

(i) Ale $n = 25550$ nie było złym wynikiem:
Dla przykladu z nierówności Czebyszewa, jeśli chcemy (dla $r = 30$ i $s = 20$) mieć

$$P(|\frac{S_N}{N} - 3/5| \leqslant \frac{1}{50}) \geqslant 1000P(|\frac{S_N}{N} - 3/5| \geqslant \frac{1}{50})$$

to prowadzi to do nierówności

$$P(|\frac{S_N}{N} - 3/5| \geqslant \frac{1}{50}) \leqslant \frac{1}{1001}$$

otrzymujemy $N \geqslant 2500 \times 1001 \times (3/5)(2/5) = 600600$.
(ii) Zauważmy, że gdy stosujemy test na poziomie istotności 0.05 to *współczesna moralna pewność* wynosi

$$C = \frac{95}{5} \approx 20$$

Bernoulli chciał $C = 1000$!.

Spirala logarytmiczna

Spira mirabilis (cudowna spirala - J. Bernoulli)
Mutata resurgo eadem (Eadem mutata resurgo) 'Choć zmieniona, powstaję taka sama'. Spirala logarytmiczna symbolizuje ‘fortitude and constancy in adversity, or of the human body, which after all its changes, even after death, will be restored to its exact and perfect self '.
(Livio, Mario (2002). The Golden Ratio: The Story of Phi, The World's Most Astonishing Number) Równanie we wsp. biegunowych

$$r = ae^{b\theta}$$

Spirala logarytmiczna

Bernoulli Society

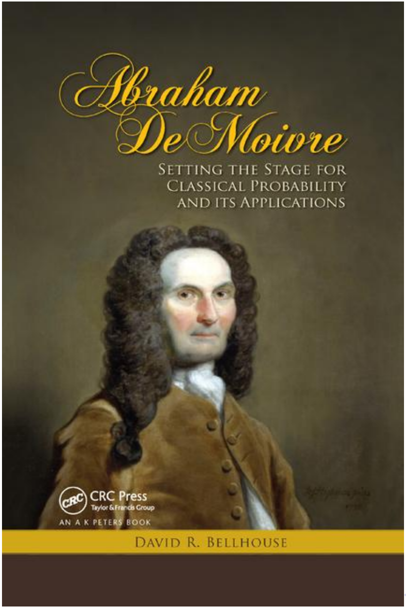
RESURGO EADEM MUTATA

Bernoulli Society
for Mathematical Statistics
and Probability

Abraham de Moivre (1667-1754)

AdM pochodził z rodziny protestanckiej, studiował matematykę na Sorbonie, w momencie odwołania edyktu nantejskiego został uwięziony w wieku 18 lat.
Uwolniony po trzech latach natychmiast wyjechał do Anglii i nigdy nie wrócił do Francji.
Przez całe życie pracował jako prywatny nauczyciel. Doradzał też hazardzistom.
Zmarł w biedzie w wieku 87 lat.
W 1718 roku opublikował *Doctrine of Chances*, następne wydania w 1738, 1756 rok.

Abraham de Moivre



Podstawowe osiągnięcie w *Doctrine of Chances* (drugie wydanie 1738): przybliżenie rozkładu dwumianowego rozkładem normalnym (CTG dla zmiennych Bernoulliego) przez poprawienie wyniku Jakuba Bernoulliego. Dla rozkladu Bernoulliego $Bin(n, 1/2)$, n=2k pokazał, że

$$\frac{P(X = n/2 + l)}{P(X = n/2)} \approx \exp(-2l^2/n)$$

oraz (przy pomocy Stirlinga)

$$P(X = n/2) \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi n}}$$

(X ma w przybliżeniu rozkład $N(n/2, n/4)$)

Zatem wiedział, że

$$P(X = n/2 + l) \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \exp(-2l^2/n)$$

Chciał otrzymać oszacowanie prawdopodobieństwa $P(|X - n/2| \leqslant a\sqrt{n}/2)$. Zrobił to rozwijając $\exp(-2l^2/n)$ i sumując szeregi dla $|l| \leqslant a\sqrt{n}/2$.
Otrzymał zadziwiająco dobre przybliżenie:
Dla $a = 1$ wynik de Moivre'a $= 0.682688$ wynik dokładny 0.682689

Jak dużo przeszacował Bernoulli ?

$$P(|\frac{S_N}{N} - 3/5| \geqslant \frac{1}{50}) \leqslant \frac{1}{1001}$$

korzystając z przybliżenia normalnego i $\frac{1}{1001} \approx \frac{1}{1000}$ otrzymujemy, że dla moralnej pewności musimy mieć

$$P(|\frac{\sqrt{25N}}{\sqrt{6}} \times (\frac{S_N}{N} - 3/5)| \geqslant \frac{\sqrt{25N}}{\sqrt{6}} \times \frac{1}{50}) \leqslant \frac{1}{1001}$$

czyli, że

$$\frac{\sqrt{25N}}{\sqrt{6}} \times \frac{1}{50} \geqslant z_{0.9995} = 3,29$$

co daje $N = 6 \times (3,29 \times 10)^2 \approx 6495$. Bernoulli dostał $N = 25550$ ....

de Moivre's defficiency..
Nie umiał rozwiązać problemu odwrotnego. Typowy przykład: Tablice Halley'a pokazują, że
frakcja mężczyzn o wieku 50 lat dożywających lat 70 wynosi $S_n/n = 0.4$.
Jaki ocenić **rzeczywiste prawdopodobieństwo** dożycia 70 lat mając tę informację tzn ile np wynosi:

$$P(p \leqslant 0.5 | S_n/n = 0.4)$$

gdzie $p = P(X \geqslant 70 | X \geqslant 50)$.
Potrzebny był Bayes ...