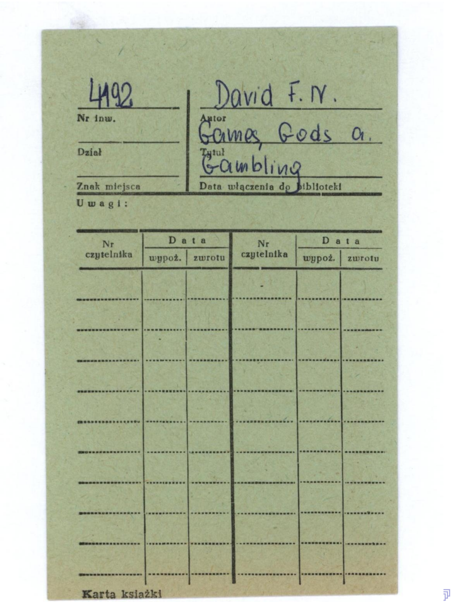
Historia Rachunku Prawdopodobieństwa i Statystyki
WYKŁAD I: Starożytne i średniowieczne pojęcie losowości

MiNI PW

Literatura

- Stephen Stigler *The History of Statistics Before 1900*, Harvard University Press, 1986
- Florence Nightingale David *Games, Gods and Gambling*, 1962
- Ian Hacking *The Emergence of Probability*, Cambridge University Press, 1975
- I Todhunter, *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Times of Pascal to That of Laplace*, Chelsea Publ. Corp., 1965
- *Na ścieżkach historii statystyki* (red. Walenty Ostasiewicz) (UE Wrocław)

Motywacje ..

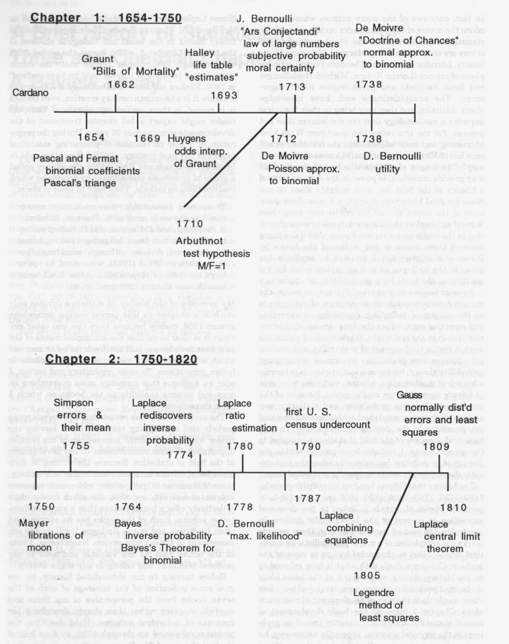

4192
Nr inw.
Dział
Znak miejsca
David F. N.
Autor
Games, Gods a. Gambling
Tytuł
Data włączenia do biblioteki
Uwagi:

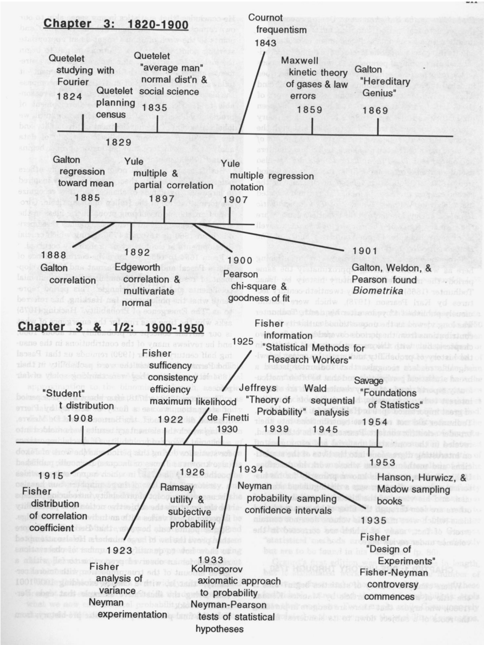
Nr czytelnika	Data		Nr czytelnika	Data	
	wypoż.	zwrotu		wypoż.	zwrotu

Karta książki

Etapy rozwoju Rachunku Prawdopodobieństwa (RP)(wdg Majstrowa)

- Prehistoria - okres trwający do czasów Fermata i Pascala (pierwsza połowa XVII w);
- Od czasów Pascala i Fermata do Jakuba Bernoullliego (*Ars Conjectandi*);
- Od *Ars Conjectandi* do połowy XIX wieku (prace de Moivre'a, Laplace'a, Gaussa);
- Okres drugiej połowy XIX wieku i początku XX wieku(m.in. szkoła petersburska (Czebyszew, Markow, Lapunow) -uściślenie podstawowych pojęć i twierdzeń teorii;
- Okres współczesny: od podania aksjomatyki Kołmogorowa (1933); RP staje się w pełni nauką dedukcyjną, powiązaną z innymi działami matematyki


Chapter 1: 1654-1750
Cardano
Graunt
"Bills of Mortality"
1662
Halley
life table
"estimates"
1693
J. Bernoulli
"Ars Conjectandi"
law of large numbers
subjective probability
moral certainty
1713
De Moivre
"Doctrine of Chances"
normal approx.
to binomial
1738
1654
Pascal and Fermat
binomial coefficients
Pascal's triange
1669 Huygens
odds interp.
of Graunt
1712
De Moivre
Poisson approx.
to binomial
1738
D. Bernoulli
utility
1710
Arbuthnot
test hypothesis
M/F=1
Chapter 2: 1750-1820
Simpson
errors &
their mean
1755
Laplace
rediscovers
inverse
probability
1774
Laplace
ratio
estimation
1780
first U. S.
census undercount
1790
Gauss
normally dist'd
errors and least
squares
1809
1750
Mayer
librations of
moon
1764
Bayes
inverse probability
Bayes's Theorem for
binomial
1778
D. Bernoulli
"max. likelihood"
1787
Laplace
combining
equations
1805
Legendre
method of
least squares
1810
Laplace
central limit
theorem


Chapter 3: 1820-1900
Cournot frequentism 1843
Quetelet studying with Fourier 1824
Quetelet "average man" normal dist'n & social science 1835
Quetelet planning census
1829
Maxwell kinetic theory of gases & law errors 1859
Galton "Hereditary Genius" 1869
Galton regression toward mean 1885
Yule multiple & partial correlation 1897
Yule multiple regression notation 1907
1888 Galton correlation
1892 Edgeworth correlation & multivariate normal
1900 Pearson chi-square & goodness of fit
1901 Galton, Weldon, & Pearson found Biometrika
Chapter 3 & 1/2: 1900-1950
Fisher information "Statistical Methods for Research Workers"
1925
Fisher sufficency consistency efficiency maximum likelihood 1922
"Student" t distribution 1908
Jeffreys "Theory of Probability" 1939
Wald sequential analysis 1945
Savage "Foundations of Statistics" 1954
de Finetti 1930
1915 Fisher distribution of correlation coefficient
1926 Ramsay utility & subjective probability
1934 Neyman probability sampling confidence intervals
1953 Hanson, Hurwicz, & Madow sampling books
1935 Fisher "Design of Experiments" Fisher-Neyman controversy commences
1923 Fisher analysis of variance Neyman experimentation
1933 Kolmogorov axiomatic approach to probability Neyman-Pearson tests of statistical hypotheses

Dwa aspekty losowości, do których się odnoszono:

- **aspekt aleatoryczny** (losowy): związany z charakterem losowości zjawiska i jego tendencją do produkowania stabilnych acz losowych wyników.

Dwa aspekty losowości, do których się odnoszono:

- **aspekt aleatoryczny** (losowy): związany z charakterem losowości zjawiska i jego tendencją do produkowania stabilnych acz losowych wyników.
- **aspekt epistemologiczny** -związany z naszą wiedzą o zjawisku, dotyczący stopnia wiary, przeświadczenia i zaufania o jego zajściu, które powstają w związku z argumentacją na temat tego zjawiska, też dotyczący stopnia uznania przez autorytety.
  (zdarzenie prawdopodobne, ale zupełnie nieprawdziwe)

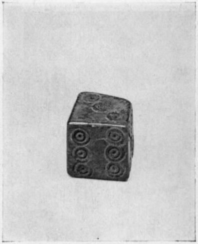
Starożytność

Prehistoryczna kostka do gry: kość z pięty owcy lub kozy : **talus (astragalus)**.
Kostka de facto czworościenna:

Starożytność

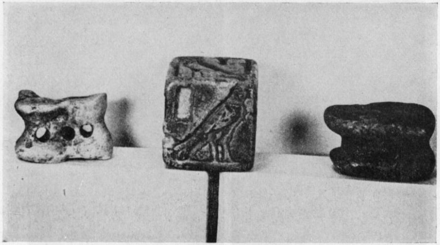
Prehistoryczna kostka do gry: kość z pięty owcy lub kozy : **talus (astragalus)**.
Kostka de facto czworościenna:
ściana z wgłębieniem: prawdopodobieństwo $\approx$ 0,39 ('4');
ściana przeciwległa: prawdopodobieństwo $\approx$ 0,37 ('3');
dwie pozostałe ściany: prawdopodobieństwo $\approx$ 0,12 ('1','6').
Numerowanie pomijało '2' i '5'.
Najstarsze talusy używane jako kości do gry: Asyria, Sumer
Starożytna Grecja, Rzym, Egipt (3500 p.n.e.)
Inne kości do gry wykonane z kości słoniowej.

Starożytność



Die roughly made on classical pattern

Imitation astragalus carved in stone



Egyptian carved ceremonial die (*centre*) **with typical astragali**
(*see page* 10)

Starożytność

Egyptian tomb painting showing a nobleman in after-life using an astragalus in a board game *(see page* 4)

(By courtesy of the Oriental Institute, University of Chicago)

Rys historyczny

Pierwsze tysiąclecie naszej ery: **złoty wiek nauki arabskiej**.
Zapożyczenia od Hindusów i Greków (640 rok przejęcie manuskryptów z biblioteki w Aleksandrii).
Przejęte z Indii: system dziesiętny, zero, astronomia.
Przejęte z Grecji: filozofia i logika. Tłumaczenia Arystotelesa na arabski i syryjski.
Rozwinęli trygonometrię i stworzyli tablice astronomiczne i astrolabium.
Mohamed ben Musa (Alkarismi) (ca 8 w. n.e.) traktat o arytmetyce i algebrze.
Zmierzch na poczatku drugiego tysiąclecia związany ze schyłkiem dominacji militarnej i politycznej.

Nauka w średniowieczu w Europie

Pierwsze tysiąclecie naszej ery: okres stagnacji rozwoju myśli naukowej w Europie.
'Epoka wędrujących uczonych' (Age of wandering scholars).
Klasztory: ośrodki rozwoju naukowego.
1000-1200 n.e. tworzenie uniwersytetów.
Zapożyczenia wiedzy matematycznej z krajów arabskich, przede wszystkim przez Włochów.
Pózniej sytuacja rozwija się bardzo dynamicznie:
'W XII w uliczki Dzielnicy Łacińskiej w Paryżu pełne były studentów dyskutujących o Arystotelesie' (F.David)

Nauka w średniowieczu w Europie

Pierwsze tysiąclecie naszej ery: okres stagnacji rozwoju myśli naukowej w Europie.
'Epoka wędrujących uczonych' (Age of wandering scholars).
Klasztory: ośrodki rozwoju naukowego.
1000-1200 n.e. tworzenie uniwersytetów.
Zapożyczenia wiedzy matematycznej z krajów arabskich, przede wszystkim przez Włochów.
Później sytuacja rozwija się bardzo dynamicznie:
'W XII w uliczki Dzielnicy Łacińskiej w Paryżu pełne były studentów dyskutujących o Arystotelesie' (F.David)
Zdobycie Konstantynopola (1453 r.) i przejęcie manuskryptów stamtąd (kupcy włoscy kupowali sprzedawane manuskrypty i przywozili do Włoch)
F. David:*great flood of manuscripts found their way westward and the stage was set for Italian renaissance*
Sytuacja analogiczna do pozyskania wiedzy przez Arabów z biblioteki w Aleksandrii.

Rozwój uniwersytetów średniowieczu

Pred rokiem 1200 istniały dobrze funkcjonujące uniwersytety w Bolonii, Paryżu i Oksfordzie, które prawdopodobnie powstały w takiej kolejności. W latach 1200-1500 uniwersytet uzyskuje taki kształt, jaki znamy do dziś.
Nauczanie:
- sztuki wyzwolone;
- prawo, medycyna i teologia.

Stopień magistra sztuk wyzwolonych uprawniał do zapisania się na wyższy fakultet.
Nauki wyzwolone:

- trivium: łacina, logika, retoryka
- quadrivium: geometria, arytmetyka, astronomia i muzyka.

Edward Grant *Średniowieczne Podstawy Nauki Nowożytnej*.

Średniowieczne pojecie prawdopodobieństwa: probabilitas

łac. probabilis - warty aprobaty, popierany przez autorytety

approve $\longrightarrow$ proof

Ocena dwóch kronik średniowiecznych: jedna zawierała więcej **prawdopodobieństwa**, druga więcej **prawdy**.
Stwierdzenie: fakt **prawdopodobny**, ale niewątpliwie **fałszywy**.
Na tej zasadzie Galileusz uważał teorię Kopernika za **nieprawdopodobną** (bo niezgodną z ogólnie przyjętą koncepcją Arystotelesa i Ptolemeusza), ale **prawdziwą**.

Wczesne przykłady uwzględnienia losowości

- Ocena liczby owoców na drzewie na podstawie obliczeń dokonanych dla jednej gałazki (trzecia księga traktatu Mahabharata, ok. 400 n.e.) Rtuparna indagowany jak tego dokonał stwierdził, że posiadł 'wiedzę o kościach' i dlatego jest biegły w rachunkach.
- Odróżnianie zdarzeń losowych od nielosowych:
  Historia Franków Grzegorza z Tours (VI w. n.e.).
  Spośród grabieżców kościoła w Latte w drodze powrotnej ocalała tylko jedna osoba, która sprzeciwiała się rabunkowi.
  Jeśli ktokolwiek myśli, że stało się to przypadkowo, niech zechce rozważyć fakt, że jedynie niewinny człowiek uratował się spośród tak wielu innych, którzy wyrządzili tyle zła.

Wróżby/ciągnienie losów

- Czy wróżby były genezą gier losowych czy odwrotnie ?
- Czy przyjmowano, że wynik wróżby zawierał element losowy czy był przejawem woli Istoty Wyższej ?
- Jak interpretowano niespełnienie się wróżby ?

Wróżby dotyczące przyszłości:

- parzysta/nieparzysta liczba dużej liczby ziaren;
- rzut 4 talusami (Grecja, Rzym)
  4 wyniki różne (Venus): prognoza sprzyjająca (pr. ca 0.04)
  układ '1,1,1,1' (psy): prognoza niesprzyjająca (pr. ca 0.001)

Wróżby/ciągnienie losów

Wróżby i ciągnienie losów jako zabobon było zwalczane przez kościół katolicki.
Jednak

- we wczesnym chrześcijąnstwie stanowiska kościelne były często obasadzne przez ciągnienie losów;
- biskupi Arras, Autun i Poitiers rozstrzygnęli spór o relikwie św. Leodegara ciągnąc losy.

Alegoria losu: koło fortuny 'Dea varia, lubrica et fragilis'

Lorenzo Leombruno's Allegory of Fortune (16th century) (*see page* 21)
The goddess is characterised as " Dea varia, lubrica et fragilis "

(*By courtesy of Mansell—Alinari*)

Konieczność ustalenia standardowych jednostek

Najczęściej doszukuje się początków rachunku prawdopodobieństwa i statystyki w grach losowych. Zapomina się o innej możliwej genezie: Problem: jak ustalić jednostki wagi, długości, aby były one akceptowalne przez społeczność, w której miały być używane ?[1]

[1] J. Köbel, *Geometrei*, 1535

Ważne idee statystyczne

Standard długości miary (stopa) na podstawie policzenia średniej długości stóp 16 osób wychodzących po mszy z kościoła.
Kilka ważnych pomysłów statystycznych:

- Próba losowa: rozpatrzono 16 losowych uczestników mszy;
- Znoszenie się błędów: liczono średnią długość stopy: efekt długiej stoopy znosił sie z efektem krótkiej stopy;
- Kolejność mierzonych była nieistotna (wymienialność), istotna była tylko łączna długość (średnia obserwacji jest statystyką dostateczną dla oczekiwanej długości stopy).

Istotny aspekt obliczeniowy:

Ważne idee statystyczne

Standard długości miary (stopa) na podstawie policzenia średniej długości stóp 16 osób wychodzących po mszy z kościoła.
Kilka ważnych pomysłów statystycznych:

- Próba losowa: rozpatrzono 16 losowych uczestników mszy;
- Znoszenie się błędów: liczono średnią długość stopy: efekt długiej stoopy znosił sie z efektem krótkiej stopy;
- Kolejność mierzonych była nieistotna (wymienialność), istotna była tylko łączna długość (średnia obserwacji jest statystyką dostateczną dla oczekiwanej długości stopy).

Istotny aspekt obliczeniowy:
Przez czterokrotne złożenie łatwo było policzyć średnia z sumy 16-tu pomiarów .. Rycina daje 'twardy' dowód procedury, w odróżnieniu od spekulatywnych teorii istnienia metra megalitycznego (meghalitic yard) na podstawie średnic budowli megalitycznych (A. Thom)

Dwa zagadnienia związane z probabilistyką rozpatrywane w średniowieczu:

- zagadnienie rzutu kośćmi;

-zagadnienie podziału stawki.

Oba te zagadnienia (przeformułowane) wrócą jako problemy kawalera de Méré.

Rzut trzema kośćmi:

wyliczono, ile jest układów oczek na trzech kostkach (bez uwzględnienia kolejności) :

6 układów tej samej liczby oczek na wszystkich kostkach;

30=6x5 układów tej samej liczby oczek na 2-ch kostkach i trzeciej różnej;

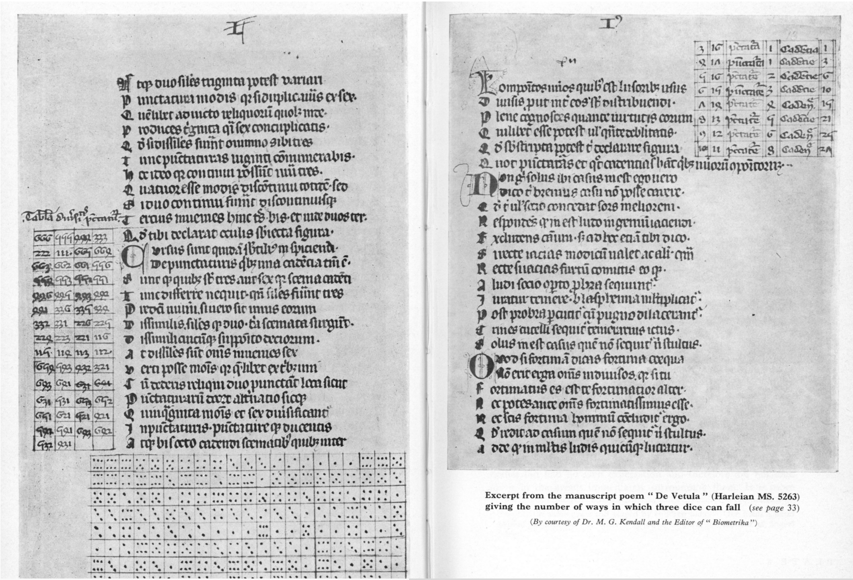
$20 = \frac{6\times5\times4}{3!}$ układów różnej liczby oczek na wszystkich kostkach.

Razem 56 (liczba 3-elementowych kombinacji z powtórzeniami ze zbioru 6-elementowego $\binom{6+3-1}{3}$).

W *de Vetula* policzono liczbę układów *uwzględniając* kolejność.

$$6 + 3 \times 30 + 6 \times 20 = 216 = 6 \times 6 \times 6 = 6^3.$$

Poemat De Vetula XIII w.



Excerpt from the manuscript poem " De Vetula " (Harleian MS. 5263) giving the number of ways in which three dice can fall (*see page* 33)

(*By courtesy of Dr. M. G. Kendall and the Editor of " Biometrika "*)

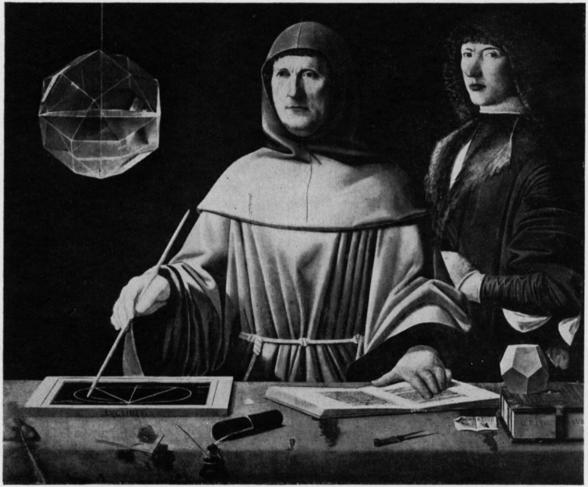
Luca Paccioli

Luca Paccioli (Fra Luca) (1445-1509)
książka: *Summa de mathematica* (1494) (w treści była przepisana całość *Liber Abacci* Leonarda z Pizy !)
Problem podziału stawki: A i B grają w bule (*balla*) pierwszy który wygra 6 rozgrywek, wygrywa całość stawki. Muszą przerwać, gdy A wygrał 5 rozgrywek, B wygrał 3. Jak podzielić stawkę ?
Luca P. traktuje to jako zwykły problem proporcji i twierdzi, że w stosunku 5:3.
(my: do wygrania trzeba co najwyżej:

Luca Paccioli

Luca Paccioli (Fra Luca) (1445-1509)
książka: *Summa de mathematica* (1494) (w treści była przepisana całość *Liber Abacci* Leonarda z Pizy !)
Problem podziału stawki: A i B grają w bule (*balla*) pierwszy który wygra 6 rozgrywek, wygrywa całość stawki. Muszą przerwać, gdy A wygrał 5 rozgrywek, B wygrał 3. Jak podzielić stawkę ?
Luca P. traktuje to jako zwykły problem proporcji i twierdzi, że w stosunku 5:3.
(my: do wygrania trzeba co najwyżej: 3 partii, 8 możliwych wyników, tylko w jednym przypadku wygrywa B. Zatem stawkę trzeba podzielić w stosunku 7:1)

Luca Paccioli



Fra Luca Paccioli (National Galleries of Capodimonte, Naples)

(*see page* 36)

(*By courtesy of Mansell—Alinari*)

Girolomo Cardano (1501-1576)

http:
//www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/people/cardano.gif

Girolomo Cardano (1501-1576)

Girolomo Cardano (1501-1576)

Nieślubny syn Facio Cardano, profesora Uniwersytetu w Padwie, przyjaciela Leonarda da Vinci.
1526- doktor nauk medycznych Uniwersytetu w Padwie, studiował również matematykę.
Spór z Tartaglią o pierwszeństwo rozwiązania równań trzeciego stopnia.
Problemy średniowiecznego zapisu algebraicznego:

$$4.\mathrm{p}.R6\ 4.\mathrm{m}.R6\ \mathrm{Productum}\ 16.\mathrm{m}.6\ 10$$

Girolomo Cardano (1501-1576)

Nieślubny syn Facio Cardano, profesora Uniwersytetu w Padwie, przyjaciela Leonarda da Vinci.
1526- doktor nauk medycznych Uniwersytetu w Padwie, studiował również matematykę.
Spór z Tartaglią o pierwszeństwo rozwiązania równań trzeciego stopnia.
Problemy średniowiecznego zapisu algebraicznego:

4.p.R6 4.m.R6 Productum 16.m.6 10

$$(4+\sqrt{6})(4-\sqrt{6})=16-6=10$$

(nie było znaku równości !, działanie mnożenia za argumentami ..)

Girolomo Cardano (1501-1576)

Książki:
Artis Magnae Liber;
Liber de Ludo Aleae (Książka o grach losowych);
Vita propria (przykład bezwstydnego (nawet jak na obecne czasy) PR-u.

O sobie: *' I was ever hot-tempered, single minded and given to women .... cunning, crafty, sarcastic, diligent, impertinent, sad, treacherous, magician and sorcerer, miserable, hateful, lascivious, obscene, lying, obsequious, fond of the prattle of old men'*.

Rozdziały:
-PERILS, ACCIDENTS, AND MANIFOLD, DIVERSE AND PERSISTENT TREACHERIES
-CONCERNING MY OWN EXISTENCE
-THINGS IN WHICH I FEEL I HAVE FAILED.

Cardano i Liber de Ludo Aleae

W *Liber de Ludo Aleae* (Książka o grach losowych) zauważa, ze jeśli w grze w kości rozpatrzymy pewne zdarzenie i zliczymy liczbę jego elementów i podzielimy ją przez liczbę wszystkich możliwych wyników to, dostaniemy wynik, który odpowiada częstości pojawienia sie takiego zdarzenia w grze.
Doświadczalnie dobrze wiedziano jak często pojawia się konkretny układ i grający byli w stanie uszeregować poprawnie zdarzenia różniące się o ok. 1/100.
Liber de Ludo Aleae opublikowano pośmiertnie w 1663 roku, Cardano napisał ją w latach ok. 1550-1560 (zmarł w 1576). To było najwieksze osiągnięcie Cardano (a nie rozwiązanie równań sześciennych, które 'zapożyczył' od Tartaglii !), niestety opublikowane już po przedstawieniu tej samej idei przez Pascala ...
Z tego powodu za twórcę definicji prawdopodobieństwa w przypadku równie prawdopodobnych wyników uważa się Pascala (1660)

Cardano i Liber de Ludo Aleae

Cardano wiedział, że należy uwzględniać powtarzające się układy.
Gra w *craps*

- 2 $\frac{1}{36}$
- 3 $\frac{2}{36}$
- 4 $\frac{3}{36}$
- 5 $\frac{4}{36}$
- 6 $\frac{5}{36}$
- 7 $\frac{6}{36}$
- 8 $\frac{5}{36}$
- 9 $\frac{4}{36}$
- 10 $\frac{3}{36}$
- 11 $\frac{2}{36}$
- 12 $\frac{1}{36}$

Przykłady zbierania danych i ich analizy w Anglii

- census Wilhelma Zdobywcy (Doomsday book), XI w.
  (spis posiadłości ziemskich, dochody, liczba chłopów, wysokość danin)
- Trial of Pyx

Przykłady zbierania danych i ich analizy w Anglii

Inspekcja skrzyni (po inwazji Normanów na wyspy: 'trial of the Pyx' od 1282 roku). Cześć monet bitych w mennicy królewskiej w Londynie była odkładana do skrzyni (the Pyx) do późniejszej inspekcji. Złoto na monety było dostarczane przez króla, możnowładców i bogatych kupców, którzy domagali się sprawdzenia, czy ich danina w złocie jest uczciwie wykorzystywana.
Podobnie jak w przypadku wprowadzenia standardu miary stopy: próba 100 monet była losowa i liczono *średnią* wagę monety w celu kompensacji błędów.

Pyx

Dopuszczano tolerancję na jednej monecie $\pm$ 5 ziaren (*grains*) i pózniej dokonywano liniowej ekstrapolacji tolerancji tzn. na 100 monetach wynosiła ona

$$\pm 5 \times 100 = 500,$$

zamiast, przyjmując $\sigma = 5$,

$$\pm 1,96 \times 5 \times \sqrt{100} \approx \pm 100.$$

Czy zdawano sobie sprawę z tego, że margines tolerancji jest za szeroki i czy ktoś z tego korzystał ?
Zmiana wagi o 4 ziarna w dół była możliwa (niewykrywalna z dużym prawdopodobieństwem) !
S. Stigler[2] twierdzi, że są dowody na to, że ta obserwacja była wykorzystywana, w szczególności, ze Anglicy oskarżali Francuzów o oszukiwanie na wadze monet.
Czy I. Newton (Master of Royal Mint) zdawał sobie sprawę z tego, że błąd nie skaluje się liniowo ?

[2] Stigler 'Statistics on the Table'

Geneza ilościowej oceny prawdopodobieństwa/ryzyka

Koncepcja ilościowej oceny prawdopodobieństwa/ ryzyka mogła zaistnieć w nauce dopiero wtedy gdy zaistniała w życiu społecznym i kulturze. Wymagała przeświadczenia, że ludzie nie są całkowicie bezbronni w rękach losu i mogą oceniać ryzyko związane ze swoimi działaniami. Istotne znaczenie miał rozwój handlu: nie planuje się morskiej wysyłki towarów bez oceny ryzyka z tym związanego.

Reguły gier losowych

W 1619 uczony purytański Thomas Gataker w książće *Of the Nature and the Use of Lots* zaatakował pogląd, że wyniki loterii i rzutów kością są znakiem woli Boga. Stwierdził, że są one determinowane przez prawa naturalne, choć reguły tych praw naturalnych są nam nieznane.