Historia Rachunku Prawdopodobieństwa i Statystyki
WYKŁAD X: Sylwetki polskich probabilistów i statystyków

MiNI PW

Mark Kac (1914-1984)

Urodził się w Krzemieńcu, gdzie skończył liceum, pózniej studiował na Uniwersytecie Jana Kazimierza we Lwowie.
Odkrył nowy dowód dla rozwiązania Cardana równań 3-ciego stopnia i za radą ówczesnego ministra edukacji Rusieckiego zaczął studiować matematykę.
Uczeń Steinhausa.
Doktorat w 1937 roku. Stypendium w 1938 na Uniwersytecie Johna Hopkinsa w Baltimore. Wyjechał w listopadzie 1938.
Jeden z twórców probabilistycznej teorii liczb, konkurencyjnej aksjomatyki rachunku prawdopodobieństwa (razem z Steinhausem), metod probabilistycznych w fizyce statystycznej (teoria przejść fazowych).
Był zafascynowany koncepcją wymiaru i faktem, ze pewne własności obowiązują tylko w przestrzeniach o pewnym wymiarze.

I always feel that that is where the interface, will you pardon the expression, of nature and mathematics is deepest. To know why only certain things observed in nature can happen in the space of a certain dimensionality. Whatever helps understand this riddle is significant, I am pleased that I, in a small way, did something with it.

Książki i prace (150 prac i książek, głownie z teorii procesów stochastycznych i rachunku prawdodobieństwa):
(1936-1940) Sześć prac (z H. Steinhausem) pod wspólnym tytułem *O funkcjach niezależnych*
'Niezależność statystyczna w rachunku prawdopodobieństwa, analizie i teorii liczb' (1959, wyd. polskie 1992)
Czy można usłyszeć kształt bębna ?
'Enigmas of Chance' (autobiografia)
....

'Niezależność statystyczna w rachunku prawdopodobieństwa, analizie i teorii liczb'

Książka Kaca zaczyna sie od analitycznego wyprowadzenia wzoru

$$\int_0^1 \prod_{k=1}^{\infty} \exp(ix\frac{r_k(t)}{2^k})dt = \prod_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \exp(ix\frac{r_k(t)}{2^k})dt,$$

gdzie $r_k(t)$ sa kolejnymi funkcjami Rademachera:

$$r_k(t) = 1 - 2\varepsilon_k(t), \quad t \in [0,1]$$

$\varepsilon_k(t)$- k-ta cyfra w rozwinęciu dwójkowym $t \in [0,1]$.
Analityczny przejaw tego, że dla losowo wybranej liczby z przedziału $[0,1]$ $\varepsilon_k(t)$ i $\varepsilon_l(t)$ są *niezależne*.

Łatwo pokazać, że

$$\mu(t \in [0,1] : r_1(t) = \delta_1, \ldots, r_n(t) = \delta_n) = \mu(t : r_1(t) = \delta_1) \cdots \mu(t : r_n(t) = \delta_n)$$

Czyli zmienne losowe

$$r_1(U), \ldots r_n(U), \ldots$$

są niezależne (U - zmienna losowa o rozkladzie $U[0,1]$.)
Dowód analityczny powyższej równości znacznie trudniejszy.

Twierdzenie Kaca-Erdösa

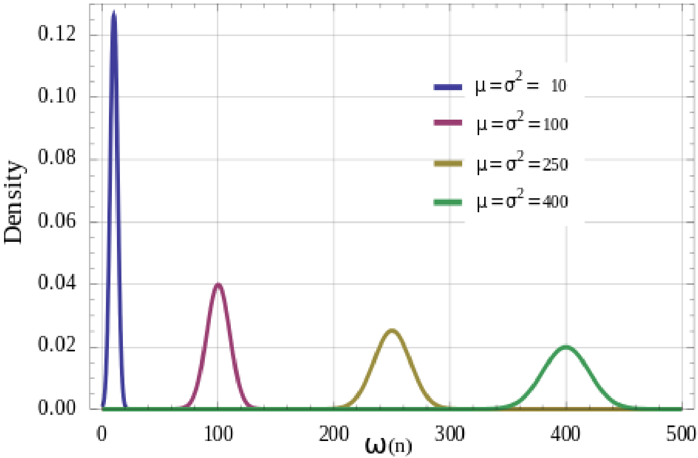
Te rozumowania doprowadzily go do intuicyjnego sformułowania twierdzenia Kaca-Erdösa: $\omega(n)$ - liczba różnych pierwszych podzielników n Dla dowolnych a i b,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\#\left\{n\leqslant x: a\leqslant\frac{\omega(n)-\log\log n}{\sqrt{\log\log n}}\leqslant b\right\}\right)=\Phi(a,b), \qquad (1)$$

gdzie $\Phi(a,b)=\int_a^b\phi(s)ds$. Intuicja była związana z faktem, że dla losowo wybranej liczby n oraz $I_{np}=I\{p|n\}$, mamy I_{np} i I_{nq} są niezależne (w sensie sformułowanym przez Kaca) dla różnych liczb pierwszych p i q:

$$\omega(n)=I_{n2}+I_{n3}+I_{n5}+I_{n7}+\cdots$$

Ilustracja


Density
0.12
0.10
0.08
0.06
0.04
0.02
0.00
0
100
200
300
400
500
ω(n)
μ=σ² = 10
μ=σ² =100
μ=σ² =250
μ=σ² =400

Miara relatywna μ_R

$A \subset R$. Miara względna $\mu_R(A)$

$$\lim_{T \to \infty} \frac{\mu(A \cap (-T, T))}{2T}$$

o ile ta granica istnieje. Rodzina zbiorow, dla których miara relatywna istnieje: $\mathcal{A}$

μ_R nie jest przeliczalnie addytywna na $\mathcal{A}$: $\mu_R((i, i+1]) = 0$, podczas gdy $\mu_R(\cup_i (i, i+1]) = 1$.

Można rozwijać rachunek prawdopodobieństwa względem miary relatywnej !

Miara relatywna zboru liczb pierwszych wynosi ...

Miara relatywna μ_R

$A \subset R$. Miara względna $\mu_R(A)$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\mu(A \cap (-T, T))}{2T}$$

o ile ta granica istnieje. Rodzina zbiorow, dla których miara relatywna istnieje: $\mathcal{A}$
μ_R nie jest przeliczalnie addytywna na $\mathcal{A}$: $\mu_R((i, i+1]) = 0$, podczas gdy $\mu_R(\cup_i (i, i+1]) = 1$.
Można rozwijać rachunek prawdopodobieństwa względem miary relatywnej !
Miara relatywna zboru liczb pierwszych wynosi ... 0.

Wartość średnia funkcji

$f(t) : R \to R$

$$M\{f(t)\} = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\, dt,$$

jeśli ta granica istnieje.
Analogicznie, dla $f : N \to N$

$$M\{f(n)\} = \lim_{t \to N} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(n)$$

Teoria procesów stochastycznych na trajektoriach ..

Twierdzenie Kaca-Steinhausa (1938)

Ciag (λ_n) jest ciągiem niezależnym nad ciałem liczb całkowitych (np. ($\log p_i$, gdzie p_i -pierwsze)

$$A_n(t) = \sqrt{2}\frac{\cos\lambda_1 t + \cdots \cos\lambda_n t}{\sqrt{n}}$$

Twierdzenie. dla dowolnych $a < b$

$$\mu_R(t : a < A_n(t) < b) \to \Phi(b) - \Phi(a).$$

Frakcja czasu, jaki złożenie drgań o niewspólmiernych częstotliwościach spedza miedzy a i b wynosi $\Phi(b) - \Phi(a)$.

Gęstość zbioru

$A \subset N$. Gęstość zbioru A

$$D(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{|A \cap \{1, 2, \ldots, n\}|}{n}$$

(odpowiednik miary relatywnej dla podzbiorów liczb naturalnych !)

$$A_p = \{n : p|n\} \qquad A_q = \{n : q|n\}$$

p, q- pierwsze, to

$$D(A_{pq}) = \frac{1}{pq} = \frac{1}{p}\frac{1}{q} = D(A_p)D(A_q)$$

Zdarzenia polegające na podzielności przez p i q są'niezależne' !

Otton Nikodym (1887-1974)

Skończył studia na UJK we Lwowie i Sorbonie, pracował w Warszawie i na Akademii Górniczej w Krakowie.
W 1946 roku wyjechał z Polski, najpierw do Belgii i Francji, później do USA.
Pracował w małym Kenyon College (Ohio).
Rozwijał teorię miary, teorię całki Lebesgue'a i rachunek operatorowy (w Stanach)

Twierdzenie Radona-Nikodyma

Uogólnił na dowolną przestrzeń probabilistyczną tw.Radona dla R^n

Jesli ν jest miarą bezwzględnie ciągłą względem a σ-skończonej μ ($\mu(A) = 0$ to $\nu(A) = 0$) to istnieje funkcja $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taką, że

$$\nu(A) = \int f(s)\,\mu(ds).$$

f: pochodna Radona-Nikodyma ν względem μ : $f = \frac{d\nu}{d\mu}$.

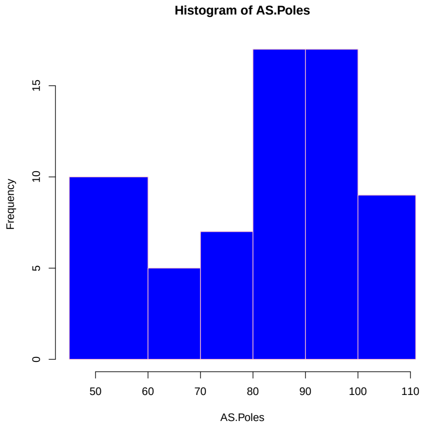
Zbiór Nikodyma

Zbiór A skonstruowany przez Nikodyma w 1927 roku, mający następującą własność:
$A \subset I^2$ o mierze 1 taki, że dla dowolnego $x \in A$
istnieje prosta l_x taka, że $l_x \cap A = \{x\}$.
Dla R^k z $k > 2$ zbiory o podobnej własności zostały skonstruowane dopiero w w 1986 roku (przez Falconera).

Zygmunt Birnbaum (1903-2000)

Studia prawnicze , doktorat z matematyki w 1929 u H. Steinhausa. jeden z pierwszych polskich aktuariuszy (*Versicherungsmathematik Diplom* u F. Bernsteina w Getyndze w 1931, w latach 1931-1937 pracował w zawodzie (Wiedeń, Lwów), później wyjechał do Stanów (University of Washington; jeden z listów polecających od A. Einsteina) działalność: analiza funkcjonalna, testowanie hipotez, nierówności probabilistyczne, *teoria niezawodności*.

Prace Polaków w Annals of Statistics



16 prac Z. Birnbauma w latach 1945-1970

Marek Fisz (1910-1963)

Studiował na Uniwersytecie Warszawskim (praca magisterska u Saksa).
w czasie wojny przebywał w ZSRR,
po wojnie pracował w Urzędzie Statystycznym, Później na Uniwersytecie Warszawskim i IM PAN.
Praca doktorska 1950: 'Kontrola jakości produkcji masowej na cechę ciągłą'
W 1960 roku wyjechał z Polski (Uniwersytet w Waszyngtonie, Stanford, Columbia)

Dzaiałalność naukowa:

- teoria niezawodności;
  - prace 1957-58 dotyczących rozkładów granicznych statystyk nieparametrycznych typu Kołmogorowa-Smirnowa;
- rozkłady nieskończenie podzielne. Książka *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna ,1954*, wydanie angielskie 1963

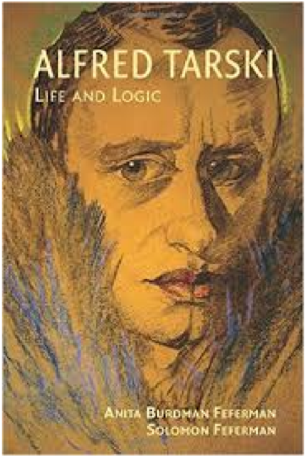
Stanisław Saks (1897-1942)

Ukończył Uniwersytet Warszawski, tu sie doktoryzował i habilitował.
Związany z UW i UJK we Lwowie.
Stypendium Rockefellera w Stanach
Uczestnik powstań śląskich i ruchu oporu w czasie drugiej wojny światowej.
Rozstrzelany przez hitlerowców.

Książki *Zarys teorii całki*
Funkcje analityczne (z A. Zygmundem)

Polska diaspora matematyczna: Alfred Tarski

Polska diaspora matematyczna



Polska diaspora matematyczna: Samuel Eilenberg

Polska diaspora matematyczna: Jan Łukasiewicz

Polska diaspora matematyczna: Leon Chwistek

Statystyka polska po II wojnie: stan początkowy

"W statystyce matematycznej sytuacja jest wyjątkowo krytyczna. Tę gałąź nauki uprawiało przed 1939 rokiem bardzo niewielu specjalistów, z których po 1945 r. pozostała w kraju jedynie garstka."

(Jan Oderfeld, 1954)

Okres 1945-1970

Główne ośrodki:

- Uniwersytet Wrocławski/Politechnika Wrocławska
- Państwowy Instytut Matematyczny (Instytut Matematyczny PAN, od 1948 r)
  Wydział Zastosowań Matematyki (działy w Warszawie i Wrocławiu)

Główne postacie:
Hugo Steinhaus, Jan Oderfeld, Julian Perkal, Stefan Zubrzycki, Józef Łukaszewicz, Marek Fisz, Stanisław Trybuła, Bolesław Kopociński, Wiesław Sadowski, Mieczysław Warmus, Oskar Lange.
Uprawiana tematyka: statystyka stosowana
Nowe pisma: *Zastosowania Matematyki* (podtytuł *Applicationes Mathematicae*, od 1953 r), *Colloquium Mathematicum*, *Listy Biometryczne* (obecnie *Biometrical Letters*)

Jan Czekanowski, 1882-1965

Wybitny antropolog, pionier stosowania metod statystycznych w antropologii i biometrii.
Profesor Uniwersytetu we Lwowie i UAM w Poznaniu.
Twórca metody Czekanowskiego analizy skupień.
Autor *Zarysu metod statystycznych w antropologii*

Hugo Steinhaus (1887-1972)

Hugo Steinhaus (1887-1972),IM PAN, UWr

- Jeden z twórców metody dendrytowej (taksonomia wrocławska): konstrukcja najkrótszego dendrytu łączącego wszystkie punkty danego zbioru skończonego i jego wykorzystanie (wspólnie z K. Florkiem, J. Łukaszewiczem, J. Perkalem i S. Zubrzyckim);
- prace dotyczące dochodzenia ojcostwa na podstawie pomiarów serologicznych;
- pomiar długości krzywej na podstawie liczby jej przecięć z liniami losowo nakładanej siatki (longimetr)
- prace dotyczące kontroli jakości (wspólnie z J. Oderfeldem i K. Wiśniewskim - twórcy pierwszych polskich norm statystycznych)
- badania dotyczące bayesowskich estymatorów prawdopodobieństwa sukcesu (Annals of Math. Statistics, 1957)

Założyciel, przy współpracy J. Oderfelda, pisma *Zastosowania Matematyki*, twórca seminarium z zastosowań matematyki w IM PAN Wrocław.

Julian Perkal (1913-1965), IM PAN, PWr, UWr, WSRWr

- Jeden z twórców metody dendrytowej (taksonomia wrocławska)
- wskaźniki Perkala: dla $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{ip}), i = 1, \ldots, n$,

$$\gamma_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_{.j}}{s_j} - m_i,$$

  gdzie m_i - wskaźnik sumaryczny i-tego obiektu:

$$m_i = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} \frac{x_{ij} - \bar{x}_{.j}}{s_j}$$

- wykorzystanie metod statystycznych w medycynie, dendrometrii (nomogram Perkala) i genetyce.

Założyciel pisma *Listy Biometryczne*

Stefan Zubrzycki (1927-1968), IM PAN, UWr

Cykl prac dotyczących zagadnień estymacji dla stacjonarnych, izotropowych pól losowych $y(p)$ dla $p \in D$, motywowanych badaniami nad złożami geologicznymi, w tym:

- problem estymacji zasobów złóż $V(D) = \int\int_D y(p)\,dp$, w tym efektywność estymatorów liniowych dla ustalonych punktów próbkowania $p_1, \ldots, p_n$;
- problem estymacji funkcji kowariancji dla obserwacji obarczonych błędami losowymi;
- wpływ kształtu regularnych sieci próbkowania na efektywność estymatora średniej $\bar{Y}$ zasobów $V(D)$.

Jeden z współautorów taksonomii wrocławskiej, jej wykorzystania w antropologii i do obalenia hipotezy o tzw. łańcuszkach gwiezdnych.

Stanisław Trybuła (1932-2008) (IM PAN, PWr)
Wkład w teorię estymacji minimaksowej i estymacji sekwencyjnej dla procesów stochastycznych (efektywne plany estymacji parametrów procesów z czasem ciągłym o przyrostach niezależnych, uwzględnienie kosztów obserwacji procesu), sterowanie procesami stochastycznymi.

Jan Oderfeld (1908-2010) (IM PAN, PW)
Metody statystycznej kontroli jakości, przede wszystkim analiza planów próbkowania.

Marek Fisz (1910-1963) (IM PAN, UW) Metody statystycznej kontroli jakości, rozkłady graniczne nieparametrycznych statystyk testowych, monografia *Rachunek Prawdopodobieństwa i Statystyka Matematyczna*.

Józef Łukaszewicz (UWr)
Statystyczne metody dochodzenia ojcostwa, teoria kolejek, problemy testowania hipotez typu porządkowego dla wielu populacji
(J. Łukaszewicz, W. Sadowski (1960), On comparing several populations with a control population, Zastosowania Matematyki, 309-320).

Lata 1970–1990

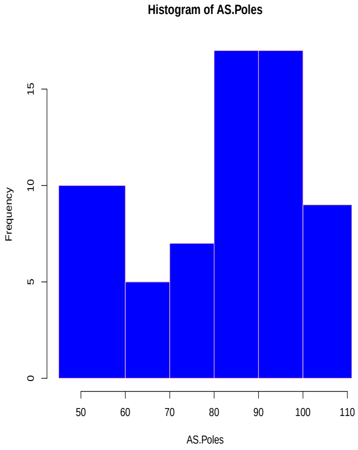
Intensywnie rozwijane kierunki:

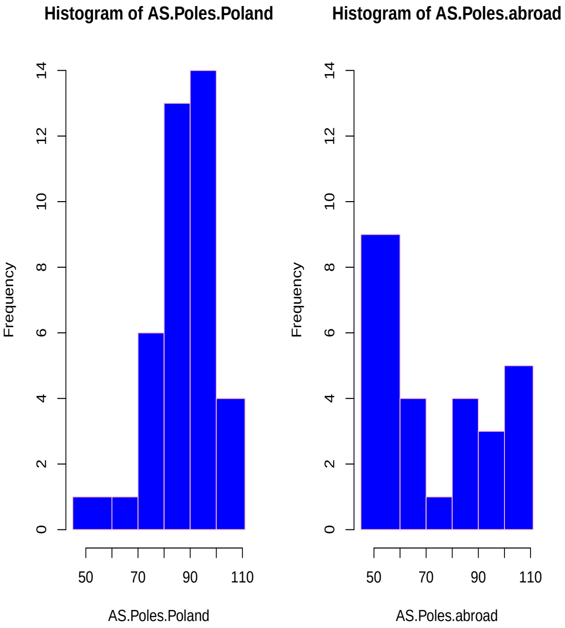
- analiza wielowymiarowa w tym teoria modeli liniowych;
- teoria testowania hipotez statystycznych;
- metody statystycznej teorii decyzji;
- nieparametryczna estymacja krzywych;
- metody sekwencyjne;
- pomiar siły zależności stochastycznej.

Działania organizacyjne:

- Kształcenie statystyków na otwartych studiach doktoranckich IM PAN i IM UWr (J. Łukaszewicz, W. Klonecki);
- Powołanie Komisji d.s. rozwoju Statystyki Matematycznej przy KNM PAN (1972);
- Organizacja corocznych konferencji poświęconych statystyce matematycznej;
- Powstanie pisma *Probability and Mathematical Statistics* (1980).

Prace statystyków polskich (w kraju i za granicą) w Annals of Statistics w latach 1945-2011. Łącznie $n = 65$ prac. Histogram dla kolejnych dekad: $[1945, 1960), [1960, 1970), \ldots, [2000, 2012)$




Histogram of AS.Poles.Poland
Frequency
0
2
4
6
8
10
12
14
50
70
90
110
AS.Poles.Poland
Histogram of AS.Poles.abroad
Frequency
0
2
4
6
8
10
12
14
50
70
90
110
AS.Poles.abroad

UNIWERSYTET I POLITECHNIKA we WROCŁAWIU

SEMINARIUM MATEMATYCZNE

Wrocław, Politechnika

Wybrzeże Wyspiańskiego 27

Wrocław, dnia 12 maja 1948 r.

U p o w a ż n i e n i e .

Podpisani kierownicy Seminarium Matematycznego Uniwersytetu i Politechniki we Wrocławiu upoważniają p.mgr.Mieczysława Warmusa,starszego asystenta,do nabycia dla Seminarium maszyny do liczenia (kalkulacyjnej) za cenę i na warunkach przez niego ustalonych oraz do podpisania umowy wiążącej w tej sprawie.

Prof.dr.H.Steinhaus HSteinhaus.

Prof.dr.Wł.Ślebodziński

Prof.dr.B.Knaster Bronisław Knaster

Prof.dr.E.Marczewski

Własnoręczność podpisu: P. T. Profesorów niniejszym stwierdza się

Wrocław, dn. 13. 5. 48

8